

УДК 519.233.2:629.735.05(045)

В. П. Харченко, д-р техн. наук, проф.,  
І. В. Остроумов

## ЩІЛЬНІСТЬ ІМОВІРНІСТІ ВІДХИЛЕННЯ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА ВІД ЗАДАНОЇ ВИСОТИ ПОЛЬОТУ

Інститут інформаційно-діагностичних систем НАУ

*Подано методику побудови щільності ймовірності відхилення повітряного корабля від заданої висоти польоту. Як розподіл використано сукупність нормального та експоненціального законів.*

**Вступ та постановка завдання.** Під час польоту повітряний корабель (ПК) час від часу відхиляється від своєї заданої траєкторії руху. Це є результатом дії великого спектра факторів, дію яких спрогнозувати й усунути досить важко. Межі можливих відхилень необхідно враховувати під час побудови нових систем навігації [4; 5]. Для оцінювання величини відхилення доречно побудувати щільність імовірності. Щільність імовірності – залежність, що характеризує появу випадкової величини. Зазвичай для побудови щільності використовують методи математичної статистики.

Статистичні дані про абсолютну висоту польоту ПК можна отримати, виконавши вимірювання точним радіолокатором, розмішеним на земній поверхні. Якщо відомо висоту розміщення радіолокатора відносно рівня Світового океану і виміряно висоту ПК, можна спостерігати за деякою зоною повітряної траси та визначити абсолютну висоту польоту ПК, що перебувають у межах зони радіолокаційного покриття. За подібних вимірювань необхідно враховувати похибки радіолокатора і похибки, спричинені станом атмосфери (метеорологічні поправки). Подібні статистичні спостереження проводить Євроконтроль у межах контролю за безпекою польотів [1; 2].

Принципово іншим способом спостереження за відхиленнями ПК у просторі є застосування точних барометричних приладів вимірювання абсолютної висоти польоту, розмішених на борту ПК.

Барометричним висотоміром вимірюється статичний тиск повітря. Принцип його дії ґрунтується на функціональній залежності тиску повітря від висоти:

$$p(h) = p_0 \exp\left(-gh \frac{\rho_0}{p_0}\right), \quad (1)$$

де  $p(h)$  – це тиск повітря на висоті  $h$  над рівнем Світового океану;  $g$  – середнє значення гравітаційного прискорення (приблизно  $9,81 \text{ м/с}^2$ );  $p_0$  і  $\rho_0$  – тиск повітря і його густина на рівні Світового океану.

Значенням абсолютної висоти польоту, отриманим за допомогою барометричної залежності (1), властиві похибки вимірювання. Величина цих похибок залежить від багатьох факторів.

Для забезпечення необхідного рівня безпеки польоту в умовах інтенсивного росту авіаперевезень виникає необхідність у побудові ймовірнісного закону відхилення ПК від заданого ешелону польоту задля подальшого його використання у навігаційних системах ПК для зменшення похибок вимірювального обладнання. За показами барометричного висотоміра можливо побудувати щільність імовірності, яка враховувала б індивідуальні особливості обладнання ПК і дозволила б прогнозувати величину відхилення.

**Характер розподілу.** Для спрощення у деяких дослідженнях характер щільності ймовірності відхилення ПК від заданої висоти польоту можна подати щільність нормального

закону розподілу з математичним сподіванням, що дорівнює заданій висоті польоту, і середньоквадратичним відхиленням  $\sigma^2$  (рис. 1).

Реальні статистичні спостереження у різних регіонах земної поверхні показують, що насправді форма щільності ймовірності розподілу незапланованого відхилення від заданого ешелону польоту має складніший вигляд.

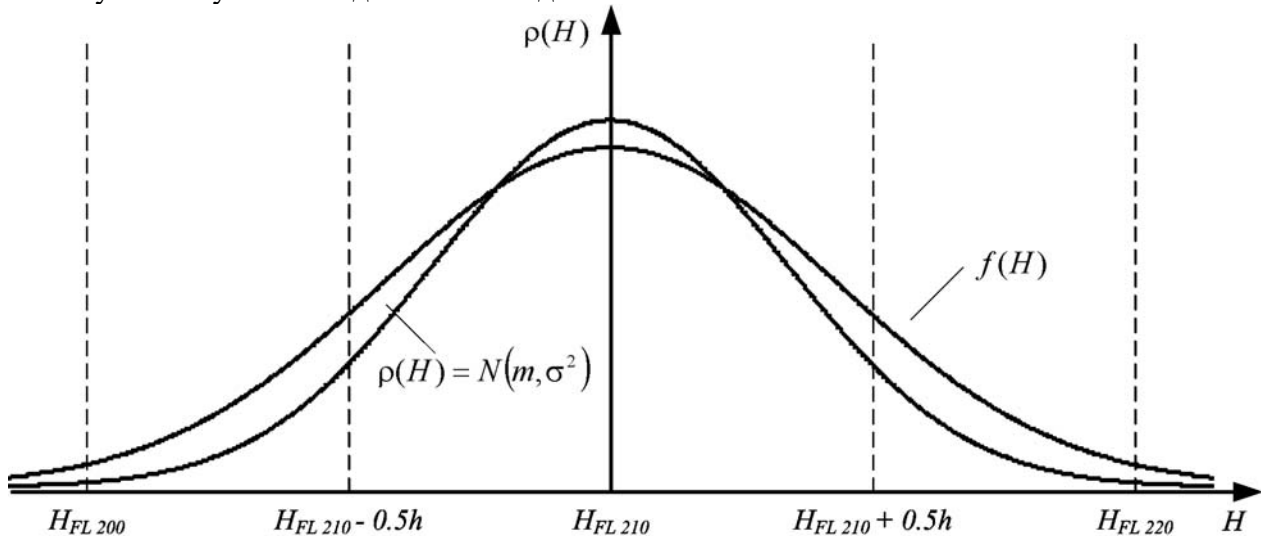


Рис. 1. Імовірності відхилення ПК від заданої висоти польоту за щільністю нормального закону  $\rho(H)$  та сукупності двох законів  $f(H)$

Дослідження, проведені міжнародним авіаційним товариством у цій галузі [1; 2], показали, що форма розподілу найкраще може бути описана, припускаючи, що вона складається з двох частин: «нормальних» похибок і «великих» похибок. Рациональність цього підходу полягає в тому, що від більшості ПК, що виконують польоти в системі, можна чекати досить стабільних характеристик витримування відносної висоти і тільки невелика частина ПК відповідає за «великі» похибки. Тобто реальна функція щільності більше подібна до сукупності двох законів: нормального та експоненціального вигляду:

$$f(H) = (1 - \alpha_1) \frac{1}{2a_1 b_1 \Gamma(b_1)} \exp\left(-\left|\frac{H - \mu}{a_1}\right|^{1/b_1}\right) + \alpha_1 \frac{1}{2a_2 b_2 \Gamma(b_2)} \exp\left(-\left|\frac{H - \mu}{a_2}\right|^{1/b_2}\right), H \in \mathfrak{R}, \quad (2)$$

де  $\alpha \in (0, 1)$  – параметр сукупності, що відповідає за внесок кожної з частин щільності розподілу;  $a_1, a_2$  – додатні параметри масштабу;  $b_1, b_2$  – додатні параметри форми;  $\mu$  – математичне сподівання;  $\Gamma(b)$  – ейлерова гамма-функція вигляду  $\Gamma(b) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{b-1} dt$ .

**Імовірність виходу ПК за межі нормальної зони.** Параметр  $\alpha_1$  відповідає за внесок нормальної та експоненціальної частин законів у загальну сукупність (2). Оскільки незапланований вихід ПК за межі нормально-допустимої зони дуже рідкісна подія, тоді варто у нормальній зоні надати перевагу закону Гауса, а на іншій ділянці зліва і справа – експоненціальному закону розподілу (рис. 2).

Тоді  $\alpha_1$  – це ймовірність виходу ПК за межі нормальної зони, тобто  $\alpha_1$  відповідає ймовірності перебування ПК у зоні, показаній штрихованою лінією на рис. 2. Проте  $\alpha_1$  відповідає площі фігури, що заштрихована на рис. 2.

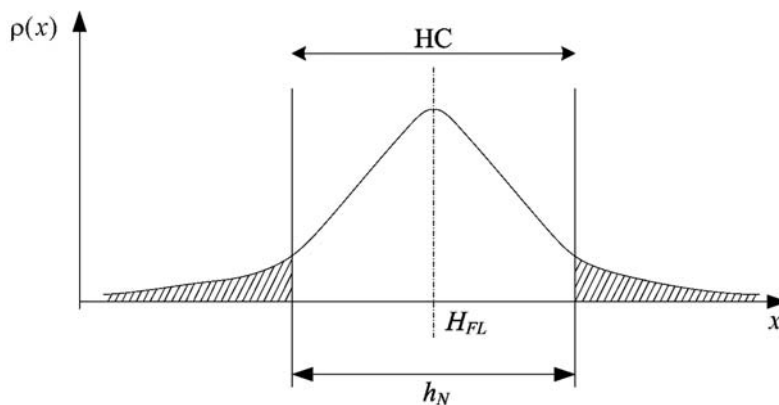


Рис. 2. Межі нормальної ситуації (НС)

Для спрощення розрахунків  $\alpha_1$  можна розраховувати за значеннями, отриманими в результаті аналізу статистичних даних вимірювань:

$$\alpha = \frac{N_{\text{ннз}}}{N_{\text{заг}}},$$

де  $N_{\text{ннз}}$  – кількість вильотів ПК за межі нормальної зони,  $N_{\text{ннз}}$  – загальна кількість спостережень.

**Обчислення параметрів закону.** Для відповідного характеру розподілу випадкової величини (абсолютної висоти польоту) необхідно оцінити невідомі параметри на підставі статистичних даних, отриманих безпосередньо в результаті виконання вимірювань.

На підставі експериментальних даних для оцінювання щільності можуть бути використані різні методи математичної статистики: метод максимальної достовірності; метод моментів; максимум наступної оцінки; мінімум  $\chi^2$  оцінки; оцінка найменших квадратів.

Вибір будь-якого конкретного оцінного методу залежить переважно від двох факторів: статистичних властивостей придатного оцінювача й обчислювальної складності методу. Якщо розглядати складність обчислення, то аналітичне розв'язання здебільшого неможливе. Більш того, складність обчислювання, зазвичай, збільшується зі збільшенням кількості оцінених параметрів.

Для розв'язання задачі підганяння невідомих параметрів розподілу за результатами статистичних спостережень будемо використовувати метод максимальної достовірності.

**Розрахунок параметрів щільності методом максимальної достовірності.** Оцінимо параметри масштабу та форми щільності розподілу ймовірності відхилення ПК від заданого ешелону польоту за допомогою обраного методу.

Нехай  $X$  – дискретна випадкова величина, яка в результаті виконання  $n$  вимірювань набуває значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Вигляд закону розподілу величини  $X$  задано у вигляді сукупності законів (2), проте вектор параметрів, який визначає цей закон, невідомий  $\theta = (a_1, b_1, a_2, b_2)$ . Оцінимо цей вектор.

Позначимо ймовірність того, що в результаті вимірювань величина  $X$  набуде значення  $x_i, i = (\overline{1, n})$ , через  $f(x_i, \theta)$ .

Запишемо функцію достовірності випадкової величини  $X$ :

$$L(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta), \text{ де } i = (\overline{1, n}).$$

Як точкову оцінку вектора параметрів  $\theta$  беруть таке значення, за якого функція достовірності набуває максимального значення. Функції  $L(x_i, \theta)$  і  $\ln L(x_i, \theta)$  набувають

максимуму за одного й того значення  $\theta$ , тому для спрощення доречно локалізувати максимум функції  $\ln L(x_i, \theta)$ .

Для знаходження точки максимуму функції  $\ln L(x_i, \theta)$  визначимо її похідну і прирівняємо її до нуля, тобто знайдемо критичну точку:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(x_i, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x_i, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta) = 0.$$

Маємо систему рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f(x_i, \theta)}{\partial \theta} \frac{1}{f(x_i, \theta)} \right) = 0 \\ \theta = (a_1, b_1, a_2, b_2) \end{cases} \quad (3)$$

Для розв'язання системи рівнянь (3) знайдемо похідну від функції за змінною  $a_1$ :

$$\frac{\partial f(a_1, b_1, a_2, b_2, x)}{\partial a_1} = -\frac{(1-\alpha_1)}{2a_1 b_1 \Gamma(b_1)} \exp\left(-\left|\frac{x-\mu}{a_1}\right|^{1/b_1}\right) \left[ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} \left| \frac{\mu-x}{a_1^2} \right| \times \left| \frac{x-\mu}{a_1} \right|^{1/b_1-1} \right] \quad (4)$$

та за змінною  $a_2$ :

$$\frac{\partial f(a_1, b_1, a_2, b_2, x)}{\partial a_2} = -\frac{(1-\alpha_1)}{2a_2 b_2 \Gamma(b_2)} \exp\left(-\left|\frac{x-\mu}{a_2}\right|^{1/b_2}\right) \left[ \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} \left| \frac{\mu-x}{a_2^2} \right| \cdot \left| \frac{x-\mu}{a_2} \right|^{1/b_2-1} \right]. \quad (5)$$

Похідна від функції за змінною  $b_1$  має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(a_1, b_1, a_2, b_2, x)}{\partial b_1} &= \frac{(1-\alpha_1)}{2a_1 b_1 \cdot \Gamma(b_1)} \exp\left(-\left|\frac{x-\mu}{a_1}\right|^{1/b_1}\right) \times \\ &\times \left( -\frac{1}{b_1} - \frac{1}{\Gamma(b_1)} \frac{\partial}{\partial b_1} \Gamma(b_1) + \frac{1}{b_1^2} \cdot \left| \frac{x-\mu}{a_1} \right|^{1/b_1} \ln \left| \frac{x-\mu}{a_1} \right| \right) \end{aligned} \quad (6)$$

та за змінною  $b_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(a_1, b_1, a_2, b_2, x)}{\partial b_2} &= \frac{(1-\alpha_1)}{2a_2 b_2 \cdot \Gamma(b_2)} \exp\left(-\left|\frac{x-\mu}{a_2}\right|^{1/b_2}\right) \times \\ &\times \left( -\frac{1}{b_2} - \frac{1}{\Gamma(b_2)} \cdot \frac{\partial}{\partial b_2} \Gamma(b_2) + \frac{1}{b_2^2} \cdot \left| \frac{x-\mu}{a_2} \right|^{1/b_2} \ln \left| \frac{x-\mu}{a_2} \right| \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Підставляючи отримані вирази для похідних (4), (5), (6), (7) у (3), матимемо нелінійну систему з чотирьох рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{cases} f_1(a_1, b_1, a_2, b_2) = 0; \\ f_2(a_1, b_1, a_2, b_2) = 0; \\ f_3(a_1, b_1, a_2, b_2) = 0; \\ f_4(a_1, b_1, a_2, b_2) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Позначимо:

$$X = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ – вектор аргументів, } F = \begin{bmatrix} f_1(a_1, b_1, a_2, b_2) \\ f_2(a_1, b_1, a_2, b_2) \\ f_3(a_1, b_1, a_2, b_2) \\ f_4(a_1, b_1, a_2, b_2) \end{bmatrix} \text{ – вектор функцій.}$$

Подемо систему рівнянь (8) у матричному вигляді

$$F(X) = 0. \quad (9)$$

Для розв'язання нелінійної системи рівнянь (8) будемо використовувати метод послідовних наближень Ньютона.

Нехай знайдено наближення  $p$  одного з коренів  $X$  векторного рівняння (9). Тоді точний корінь рівняння (9) можна подати у вигляді

$$X = X^{(p)} + \varepsilon^{(p)}, \quad (10)$$

де  $\varepsilon^{(p)} = (\varepsilon_1^{(p)}, \varepsilon_2^{(p)}, \varepsilon_3^{(p)}, \varepsilon_4^{(p)})$  – похибка знаходження кореня.

Підставимо вираз (10) у рівняння (9) і отримаємо

$$F(X) = F(X^{(p)} + \varepsilon^{(p)}) = 0. \quad (11)$$

Оскільки функція  $F(X)$  – неперервна диференційована у деякій множині, що містить  $X$  і  $X^{(p)}$ , тоді ліву частину рівняння (11) можна розкласти у ряд Тейлора за степенями малого вектора  $\varepsilon^{(p)}$ , обмежуючись лінійними членами:

$$F(X^{(p)} + \varepsilon^{(p)}) = F(X^{(p)}) + F'(X^{(p)})\varepsilon^{(p)} = 0, \quad (12)$$

де  $F'(X^{(p)})$  – матриця Якобі системи функцій  $F$  відносно змінних  $X$  вигляду

$$F'(X) = W(X) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_2} & \frac{\partial f_1(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_3} & \frac{\partial f_1(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_4} \\ \frac{\partial f_2(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_2} & \frac{\partial f_2(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_3} & \frac{\partial f_2(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_4} \\ \frac{\partial f_3(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_1} & \frac{\partial f_3(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_2} & \frac{\partial f_3(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_3} & \frac{\partial f_3(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_4} \\ \frac{\partial f_4(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_1} & \frac{\partial f_4(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_2} & \frac{\partial f_4(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_3} & \frac{\partial f_4(a_1, b_1, a_2, b_2)}{\partial a_4} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Враховуючи (13) перепишемо рівність (12) у вигляді  $F(X^{(p)}) + W(X^{(p)})\varepsilon^{(p)} = 0$ , тоді

$$\varepsilon^{(p)} = -W^{-1}(X^{(p)})F(X^{(p)}). \quad (14)$$

Підставляючи рівняння (14) у вираз (10), отримаємо

$$X^{(p+1)} = X^{(p)} - W^{-1}(X^{(p)})F(X^{(p)}), \quad p = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (15)$$

Як початкові значення вектора параметрів  $X^{(p)}$  використаємо результати дослідження [1] для певного регіону земної поверхні. Таким чином, за формулою (15) поступово уточнюють параметри розподілу, тим самим наближаючись до істинного значення.

**Результати розрахунку параметрів для конкретного ПК.** Для розрахунку параметрів розподілу щільності використаємо записи параметрів польотів одного літака (Ан-140), що

виконував рейси за одним і тим самим маршрутом. Інформація про польоти була записана бортовим пристроєм реєстрації БУР-92А-04. Для побудови щільності використаємо записи абсолютної висоти польоту ПК, надані апаратурою «ИКВСП-140». Після декодування за допомогою спеціалізованого програмного комплексу «Монстр» [3] з них були вилучені показання абсолютної висоти у цифровому вигляді для подальшого оброблення.

Загальну характеристику записів наведено у таблиці. За результатами статистичного оброблення дискретних відміток абсолютної висоти польоту ПК (таблиця) побудовано загальну гістограму, що характеризує відхилення ПК від висоти заданого ешелону польоту (для ЕП-160, абсолютна висота – 4900 м) (рис. 3).

**Загальна характеристика записів абсолютної висоти польоту**

№	Марка літака	Дата польоту	Заданий ешелон польоту	Загальна кількість дискретних записів
1	Ан-140	17.02.2007	ЕП-160	2250
2		20.02.2007		2480
3		15.03.2007		2150
4		20.03.2007		1600
5		22.03.2007		1644
6		29.03.2007		1850
7		2.04.2007		2200
8		6.04.2007		2400
9		10.04.2007		2400
10		11.04.2007		2050
11		12.04.2007		1800
12		14.04.2007		2500
13		15.04.2007		2450
14		17.04.2007		2350
15		20.04.2007		2300
16		21.04.2007		2800
17		23.04.2007		2200
18		26.04.2007		1850
19		27.04.2007		1950
20		28.04.2007		1900
21		29.04.2007		2400
22		30.04.2007		2600
Загальний обсяг вибірки				48124

На підставі отриманої статистичної гістограми (рис. 3) виконано розрахунок параметрів для сукупності двох розподілів за наведеною вище методикою. Розрахунок виконано за спеціально написаною комп'ютерною програмою мовою математичного програмування MATLAB.

У результаті були отримані параметри щільності ймовірності відхилення ПК від заданої траєкторії руху для літака Ан-140:

$$\mu = -24,927; \alpha = 0,0035533; a_1 = 29,686; a_2 = 252,13; b_1 = 0,5; b_2 = 1.$$

**Висновки.** Запропонована методика дозволяє побудувати щільність імовірності відхилення ПК від запланованої висоти польоту за даними вимірювань барометричного висотоміра. Такий підхід дозволяє віднайти характер розподілу для конкретного ПК чи для класу літаків шляхом розрахунку невідомих параметрів. Розроблена програмна реалізація методики розрахунку у середовищі математичного програмування MATLAB дозволяє досить швидко виконувати розрахунки для будь-яких початкових даних.

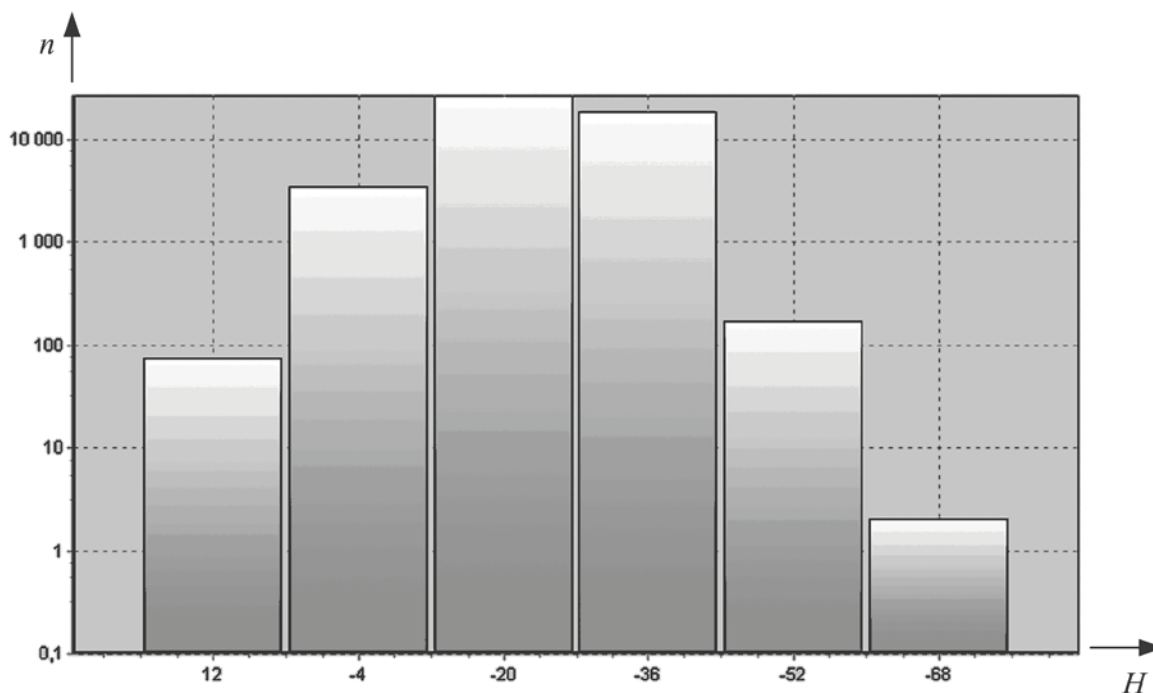


Рис. 3. Гістограма відхилень від заданої висоти польоту, побудована за статистичними даними польотів

### Список літератури

1. *Международная организация гражданской авиации. Группа экспертов по рассмотрению общей концепции эшелонирования. Совещание (6; 1988). Doc 9536, RGCS/6 TOM 1. Доклад: Монреаль, 28 ноября – 15 декабря 1988 г. Т. 1 / ICAO. – Монреаль, 1988. – 270 с.*
2. *Международная организация гражданской авиации. Группа экспертов по рассмотрению общей концепции эшелонирования. Совещание (6; 1988). Doc 9536, RGCS/6 TOM 2. Доклад: Монреаль, 28 ноября – 15 декабря 1988 г. Т. 2 / ICAO. – Монреаль, 1988. – 672 с.*
3. *Мишарин И. В., Непорожний Г. И. Обработка и анализ полётной информации программно-аппаратным комплексом (шифр «Монстр»): Конспект лекций. – К.: НАУ, 2007. – 160 с.*
4. *Остроумов И. В., Кукуш А. Г., Харченко В. П. Оценка вероятности правильного распознавания по правилу Байеса при неточно известной плотности распределения // Известия высш. учеб. заведений. «Радиоэлектроника». – 2007. – Т. 50, № 11. – С. 60 – 68.*
5. *Остроумов И. В., Кукуш О. Г., Харченко В. П. Багатоальтернативна класифікація ситуацій повітряного стану у разі, коли щільності розподілу ймовірності відомі неточно // Вісн. НАУ. – 2007. – Т. 31, № 1. – С. 73 – 77.*

В. П. Харченко, И. В. Остроумов

#### **Плотность вероятности отклонения летательного аппарата от заданной высоты полёта**

Представлена методика построения плотности вероятности отклонения воздушного судна от заданной высоты полёта. В качестве распределения использовано совокупность нормального и экспоненциального законов.

V. P. Kharchenko, I. V. Ostroumov

#### **The probability density of aircraft deviation from flight-plan level**

In this article the principle of the probability density estimation of aircraft deviation from flight-plan level has been represented. The mix of Normal and Exponential laws has been used.